

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Райхерт Татьяна Николаевна
Должность: Директор
Дата подписания: 14.02.2022 09:24:59
Уникальный программный ключ:
c914df807d771447164c08ee17f8e2f93dde816b

Министерство образования и науки Российской Федерации
Нижнетагильский государственный социально-педагогический институт (филиал)
федерального государственного автономного образовательного учреждения
высшего образования
«Российский государственный профессионально-педагогический университет»

Факультет естествознания, математики и информатики
Кафедра естественных наук и физико-математического образования



РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Уровень высшего образования
Направление подготовки
Профиль
Форма обучения

Бакалавриат
44.03.01 Педагогическое образование
«Математика»
Заочная

Рабочая программа дисциплины «Алгебра и теория чисел». Нижний Тагил : Нижнетагильский государственный социально-педагогический институт (филиал) ФГАОУ ВО «Российский государственный профессионально-педагогический университет», 2017. – 15 с.

Настоящая программа составлена в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование.

Автор: кандидат педагогических наук, Т. Ю. Паршина
доцент кафедры естественных наук
и физико-математического образования

Рецензент: кандидат педагогических наук, Е. В. Вязовова
доцент кафедры естественных наук
и физико-математического образования

Одобрена на заседании кафедры естественных наук и физико-математического образования 28 сентября 2017 г., протокол № 2.

Заведующий кафедрой О. В. Полявина

Рекомендована к печати методической комиссией факультета естествознания, математики и информатики 13 октября 2017 г., протокол № 2.

Председатель методической комиссии ФЕМИ В. А. Гордеева

Декан ФЕМИ Т. В. Жуйкова

Зав. отделом АВТ и МТО научной библиотеки О. В. Левинских

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цель и задачи освоения дисциплины.....	4
2. Место дисциплины в структуре образовательной программы.....	4
3. Результаты освоения дисциплины.....	4
4. Структура и содержание дисциплины.....	5
4.1. Объем дисциплины и виды контактной и самостоятельной работы.....	5
4.2. Содержание и тематическое планирование дисциплины.....	6
4.3. Содержание разделов (тем) дисциплины.....	6
5. Образовательные технологии.....	7
6. Учебно-методические материалы.....	7
6.1. Задания и методические указания по организации и проведению практических занятий.....	7
6.2. Задания и методические указания по организации самостоятельной работы студента.....	10
7. Учебно-методическое и информационное обеспечение.....	11
8. Материально-техническое обеспечение дисциплины.....	12
9. Текущая аттестация качества усвоения знаний.....	12
10. Промежуточная аттестация.....	12

1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель дисциплины: формирование и развитие у студентов профессиональных и специальных компетенций на основе обучения фундаментальным понятиям высшей алгебры, алгебры многочленов, теории делимости целых чисел и теории сравнений.

Задачи:

1. Сформировать у студентов представления об основных алгебраических структурах.
2. Сформировать у студентов цельное представление об алгебре многочленов от одной и нескольких переменных, теории делимости целых чисел и теории сравнений.
3. Сформировать умения применять изученную теорию к решению задач, в том числе элементарной (и школьной) математики.
4. Изучить специальные способы решения уравнений в целых, натуральных, простых числах.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина «Алгебра и теория чисел» является частью учебного плана по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, профиль «Математика». Дисциплина Б1.В.ОД.4.7 «Алгебра и теория чисел» включена в Блок Б.1 «Дисциплины (модули)» и является составной частью раздела Б1.В. «Вариативная часть», Б1.В.ОД «Обязательные дисциплины», модуля 4 «Предметное обучение по профилю». Дисциплина реализуется в НТГСПИ на кафедре естественных наук и физико-математического образования.

Данная дисциплина логически связана с дисциплинами профиля «Математика» (элементарная математика, математический анализ), которые изучаются на первом – третьем курсах. Дисциплина содержит темы, необходимые для успешного изучения высшей математики, помогает глубже осваивать темы элементарной математики, касающиеся теории функций.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина направлена на формирование и развитие следующих компетенций:

ПК-1 – готовность реализовывать образовательные программы по учебному предмету в соответствии с требованиями образовательных стандартов;

СК-1 – владение основными положениями классических разделов математической науки, базовыми идеями и методами математики, системой основных математических структур и аксиоматическим методом;

СК-2 – способность понимать взаимосвязь между различными математическими дисциплинами, пользоваться языком математики, корректно выражать и аргументировано обосновывать имеющиеся знания;

СК-3 – способность понимать универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость в различных областях человеческой деятельности, роль и место математики в системе наук, значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике, общекультурное значение математики.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Знать:

31. Виды основных алгебраических структур и их свойства.
32. Свойства колец многочленов от одной и нескольких переменных.
33. Критерии приводимости и неприводимости многочленов над основными числовыми полями.
34. Определение и простейшие свойства делимости целых чисел.

35. Алгоритм Евклида для двух натуральных чисел.
36. Свойства простых чисел, основную теорему арифметики.
37. Определение и простейшие свойства сравнений.
38. Способы решения сравнений с переменной.

Уметь:

У1. Находить наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух и нескольких целых чисел или многочленов от одной переменной с помощью алгоритма Евклида.

У2. Отделять кратные неприводимые множители многочлена.

У3. Раскладывать многочлен по степеням двучлена.

У4. Выразить симметрические многочлены через основные симметрические многочлены.

У5. Определять, какими свойствами обладает данная бинарная операция на множестве, вид алгебраической структуры, отделять изоморфные структуры.

У6. Проверить, является ли данное натуральное число простым, составным.

У7. Составить каноническое представление натурального числа.

У8. Находить НОД и НОК с помощью канонических представлений.

У9. Находить цепную дробь, в которую раскладывается заданное рациональное число.

У10. Применять свойства сравнений для решения уравнений первой степени с двумя неизвестными во множестве целых чисел.

У11. Применять теорему Эйлера и теорему Ферма для вычисления остатков от деления.

У12. Решать сравнения первой степени с помощью теоремы Эйлера и свойств подходящих дробей.

Владеть:

В1. Решения типичных задач теории многочленов.

В2. Навыками применения аппарата теории делимости и теории сравнений для решения прикладных задач.

В3. Приёмами самоорганизации и умениями самоконтроля учебной деятельности

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Объем дисциплины и виды контактной и самостоятельной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 зачётных единиц (216 часов), их распределение по видам работ представлено в таблице № 1.

Таблица № 1

Распределение трудоемкости дисциплины по видам работ

Вид работы	Форма обучения
	Заочная
	4 курс, 7 сессия
Общая трудоемкость дисциплины по учебному плану	216
Контактная работа, в том числе:	22
Лекции	10
Практические занятия	12
Самостоятельная работа, в том числе:	185
Изучение теоретического курса	104
Самоподготовка к текущему контролю знаний	63
Выполнение контрольной работы	18
Подготовка к экзамену	9

4.2. Содержание и тематическое планирование дисциплины

Тематический план дисциплины

Наименование разделов и тем дисциплины (модуля)	Семестр (сессия)	Всего, часов	Вид контактной работы, час				Самостоятельная работа, час	Формы текущего контроля успеваемости
			Лекции	Практ. занятия	Лаб. работы	Из них в интерактивной форме		
Тема 1. Основные алгебры	7	36	2	2			32	Решение задач у доски.
Тема 2. Многочлены		53	4	4			45	Опрос по теории
Тема 3. Теория делимости в кольце целых чисел		51	2	4			45	
Тема 4. Теория сравнений с арифметическими приложениями		49	2	2			45	
Контрольная работа		18					18	
Экзамен		9					9	
Итого		216	10	12			194	

4.3. Содержание разделов (тем) дисциплины

Лекционный курс (10 часов)

Лекция 1. Основные алгебры. (2 часа)

Бинарные операции: ассоциативные, коммутативные операции. Дистрибутивность бинарной операции относительно другой бинарной операции. Нейтральный элемент, его единственность; симметричный элемент и его единственность в случае ассоциативной операции. Понятие группы. Простейшие свойства групп. Изоморфизм групп. Понятие кольца. Простейшие свойства кольца. Делители нуля в кольце. Алгебры и алгебраические системы. Понятие поля. Понятие частного, свойства частных, отсутствие делителей нуля в поле. Числовое поле.

Лекция 2. Многочлены от одной переменной. (2 часа)

Кольцо многочленов от одной переменной над коммутативным кольцом с единицей. Деление многочлена на двучлен $(x - c)$. Схема Горнера, теорема Безу. Формальная производная многочлена над полем нулевой характеристики. Разложение по степеням $(x - c)$. Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Теория делимости: теорема о делении с остатком в кольце многочленов над полем. Простейшие свойства делимости многочленов. НОД многочленов, свойства НОДа. Алгоритм Евклида. НОК многочленов. Попарно взаимно простые многочлены. Неприводимые над полем многочлены. Основная теорема теории делимости многочленов. Неприводимые кратные множители многочлена. Кратные корни.

Лекция 3. Многочлены от нескольких переменных. (2 часа)

Кольцо многочленов от нескольких переменных над целостным кольцом. Симметрические многочлены, основная теорема о симметрических многочленах. Выражение симметрического многочлена через элементарные симметрические многочлены.

Лекция 4. Теория делимости в кольце целых чисел. (2 часа)

Теорема о делении с остатком для целого a и натурального b , формулировка теоремы о делении с остатком для целого a и целого b ($b \neq 0$). Отношение делимости в кольце Z и его простейшие свойства. Наибольший общий делитель нескольких целых чисел, его линейное представление, свойства и правило нахождения. Взаимно простые целые числа и их свойства. Алгоритм Евклида. Наименьшее общее кратное нескольких целых чисел, условие его существования, свойства и правило нахождения. Связь между наибольшим общим делителем и наименьшим общим кратным двух натуральных чисел.

Простые числа. Основное свойство простого числа. Основная теорема арифметики, каноническое представление натурального числа и его единственность. Нахождение натуральных делителей натурального числа по его каноническому представлению. Число и сумма натуральных делителей натурального числа. Бесконечность множества простых чисел, решето Эратосфена, критерий простоты натурального числа.

Лекция 5. Теория сравнений. (2 часа)

Основные свойства сравнений, классы вычетов. Кольцо классов вычетов. Полная и приведённая системы вычетов. Теоремы Эйлера и Ферма. Свойства функции Эйлера. Каноническое представление $n!$.

Сравнения и их системы с одной переменной. Понятие решения сравнения и решения системы сравнений. Равносильные сравнения. Методы решения сравнений с одной переменной. Сравнения первой степени и их решение. Группа обратимых элементов кольца Z_m . Поле классов вычетов по простому модулю. Сравнения по простому модулю. Показатель числа и класса по данному модулю. Первообразные корни и их классы. Существование первообразных корней по простому модулю. Индексы чисел и классов по данному модулю и их свойства. Применение индексов.

5. Образовательные технологии

Процесс обучения дисциплине «Алгебра и теория чисел» рекомендуется строить с опорой на традиционный подход, при котором на лекционных занятиях закладываются основы теоретических знаний по дисциплине, а на практических занятиях ведется работа по усвоению теории и приобретению практических умений и навыков решения типичных задач. При проведении занятий полезно связывать изучаемые вопросы с курсом методики обучения математике, создавать проблемные профессиональные ситуации.

С целью формирования у студентов компетенций, предусмотренных программой, следует применять следующие технологии:

- практикум с использованием практико-ориентированных задач;
- технологию деятельностного подхода;
- обучение в сотрудничестве.

6. Учебно-методические материалы

6.1. Задания и методические указания по организации и проведению практических занятий

Тема 1. Основные алгебры. (2 часа).

Задание. Повторить основные вопросы теории:

1. Определение бинарной операции, свойства ассоциативности, коммутативности, дистрибутивности.
2. Определение нейтрального элемента, его свойство, определение симметричного элемента, его свойства.
3. Аксиомы группы, кольца, поля, примеры групп, колец, полей.

Решить задачи.

1. Является ли бинарной операцией на N действие \circ , определённое правилом $a \circ b = a^2 - 2ab + b^2$?

2. На \mathbb{R}^+ заданы бинарную операцию \circ по правилу $a \circ b = \sqrt{a \cdot b}$. Какие из утверждений истинны:

а) $\exists e \in \mathbb{R}^+ \forall a \in \mathbb{R}^+ a \circ e = e \circ a = a$;

б) $\forall a \in \mathbb{R}^+ \exists e \in \mathbb{R}^+ a \circ e = e \circ a = a$?

3. Определена ли на множестве $2\mathbb{Z}+1$ операция, заданная правилом $a \circ b = \frac{a+b}{2}$?

4. Докажите, что на множестве \mathbb{R} операция * нахождения среднего арифметического $\left(x * y = \frac{x+y}{2}\right)$ дистрибутивна относительно себя.

5. На множестве \mathbb{Q} задана операция * так: $x * y = x + y + 1$. Ассоциативна ли операция *?

6. Докажите, что действие \circ , определённое правилом $a \circ b = a^2 + b^2$ является коммутативной, но не ассоциативной бинарной операцией на \mathbb{R} .

7. На множестве $A = \{0, 1, 2\}$ задана операция * так: каждой паре (a, b) ставится в соответствие остаток от деления на 3 числа $a + b + ab$. Составьте таблицу Кэли для операции *. Какими свойствами обладает операция *?

8. На множестве $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ задана операция * так: каждой паре (a, b) ставится в соответствие остаток от деления на 5 числа $2ab$. Составьте таблицу Кэли для операции *. Коммутативна ли операция *? Есть ли в A нейтральный элемент относительно *?

9. Обладает ли множество \mathbb{R}^+ нейтральным элементом относительно операции *, заданной равенством $a * b = \sqrt{a \cdot b}$?

10. Ассоциативна ли операция вычитания на множестве \mathbb{Z} ?

11. Дистрибутивна ли на \mathbb{R} операция \square относительно \oplus , если операции заданы так: $a \square b = a \cdot b + a + b$, $a \oplus b = a + b + 1$?

12. Докажите, что операция взятия наименьшего из двух действительных чисел: $(a, b) \xrightarrow{*} \min\{a, b\}$ дистрибутивна относительно себя.

12. Доказать, что $(\mathbb{Z}, *)$ является группой, если $a * b = \begin{cases} a + b, & \text{если } a - \text{чётно} \\ a - b, & \text{если } a - \text{нечётно} \end{cases}$. Будет ли эта группа абелевой?

13. Образуется ли множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $ac \neq 0$, подгруппу в группе $GL_2(\mathbb{R})$ – группе обратимых матриц второго порядка над полем действительных чисел?

14. Образуется ли группа множество $\mathbb{Q} \setminus \{-3\}$ относительно операции *, определяемой правилом $a * b = ab + 3a + 3b + 6$?

Литература для подготовки к практическому занятию:

1. Веселова Л. В. Алгебра и теория чисел. [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Л. В. Веселова, О. Е. Тихонов. — Электрон. дан. — Казань : КНИТУ, 2014. — 107 с. Режим доступа <http://e.lanbook.com/book/73214>

2. Курош А. Г. Курс высшей алгебры [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2013. — 432 с. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/30198>

Тема 2. Многочлены. (4 часа)

Задание. Повторить основные вопросы теории:

1. Теорема о делении с остатком для двух многочленов на поле, свойства делимости.
2. НОД многочленов, алгоритм Евклида.

3. Приводимые и неприводимые многочлены над полем. Алгоритм отделения кратных неприводимых многочленов.
4. Лексикографическая форма записи многочлена от нескольких переменных
5. Симметрические многочлены, основная теорема о симметрических многочленах.
6. Критерий неприводимости многочлена над полем комплексных, полем действительных, полем рациональных чисел.
7. Каноническое представление многочлена над полем комплексных чисел. Основная теорема алгебры.

Решить задачи.

Решить задачи из пособия 2: № 36(а, б), 37(а, б), 38, 60(а, б), 62 (а, б), 64(а), 65(а), 66(а), 140(а), 151(а), 153(а), 168(а, б), 173(а), 174(а), 180(а, л), 185. № 259-263, 271(а), 272(а, б), № 210, 211.

Литература для подготовки к практическому занятию:

1. Курош А. Г. Курс высшей алгебры [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2013. — 432 с. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/30198>

2. Паршина Т Ю. Алгебра многочленов [Текст] : учеб.-метод. пособие для студентов, обучающихся по профилю "Математика" / Т. Ю. Паршина ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Нижнетагил. гос. соц.-пед. акад. — Нижний Тагил : НТГСПА, 2014. — 88 с.

Тема 3. Теория делимости в кольце целых чисел. (4 часа)

Задание. Повторить основные вопросы теории:

1. Теорема о делении с остатком для целого и натурального числа, для двух целых чисел, ограничения на остаток от деления.
2. Свойства делимости целых чисел.
3. Определение и критерий простого и составного числа, основная теорема арифметики, каноническое представление натурального числа.
4. Алгоритм Евклида. Нахождение НОД и НОК двух и более натуральных (целых) чисел.
5. Цепная дробь, способ обращения рационального числа в цепную дробь, подходящие дроби к цепной.
6. Свойства подходящих дробей.

Решить задачи.

Решить задачи из пособия 2: §1 № 1(1,3,5), 2 (1,7,13,17), 4-8, 12, 2; §2 № 1, 3,11, 16, 17. §3 № 1(1,11,19), 2 (1,3), 3(1,3); §4 № 1(1,11), 2(3,17); §6 № 1(1,4,8), 4(1,3), 20. §8 № 1(1,8,11), 2(1,3), 7(1), 8(1).

Литература для подготовки к практическому занятию:

1. Бухштаб А. А. Теория чисел. [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2015. — 384 с. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/65053>

2. Паршина Т Ю. Теория делимости в кольце целых чисел [Текст] : учебно-методическое пособие для физико-математического факультета / Т. Ю. Паршина ; Федер. агентство по образованию, Нижнетагил. гос. соц.-пед. акад. - Нижний Тагил : НТГСПА, 2010. - 48 с.

Тема 4. Теория сравнений с арифметическими приложениями (2 часа)

Задание. Повторить основные вопросы теории:

1. Определение сравнения, свойства сравнений, классы вычетов.
2. Полная и приведённая системы вычетов, теоремы Эйлера и Ферма.
3. Решение сравнения с переменной, общий способ решения сравнения с переменной, равносильные сравнения.
4. Сравнения первой степени, методы их решения.

Решить задачи.

1. Записать в виде сравнения утверждение: целое число a имеет вид $8k - 3$.

2. Найти сумму, разность и произведение классов $\bar{7}$ и $\bar{23}$ в кольце Z_{25} .
3. Составить полную систему абсолютно наименьших вычетов по модулю 15.
4. Найти число чисел, удовлетворяющих условиям: $12 \leq a \leq 600$, $(a, 7) = 1$.
5. Найти остаток от деления 23^{48} на 20, используя теорему Эйлера.
6. Решить уравнение $\varphi(90^x) = 2160$.
7. Найти каноническое представление числа $11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 21$. Вычислить число и сумму его натуральных делителей.
8. Решить сравнение $6x^{12} + 2x^{10} - 8x^7 + x^3 - 2x + 1 \equiv 0 \pmod{5}$.
9. Решить во множестве целых чисел уравнение $27x + 31y = 29$.
10. Решить сравнения:
 $19x \equiv 52 \pmod{30}$, $15x \equiv 70 \pmod{27}$, $13x \equiv 72 \pmod{25}$, $18x \equiv 46 \pmod{10}$;
 используя свойства подходящих дробей: $41x \equiv 7 \pmod{101}$, $105x \equiv 79 \pmod{286}$.
11. С помощью таблиц индексов: решить сравнения: $37x^{12} \equiv 39 \pmod{67}$; $56^x \equiv 30 \pmod{73}$;
 найти остаток от деления 49^{52} на 23.

Литература для подготовки к практическому занятию:

1. Бухштаб А. А. Теория чисел. [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2015. — 384 с. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/65053>

Таблица № 3

6.2. Задания и методические указания по организации самостоятельной работы студента

Темы занятий	Количество часов			Содержание самостоятельной работы	Формы контроля СРС
	Всего	Аудиторных	Самостоят. работы		
Тема 1. Основные алгебры.	36	4	32	Изучение теории по учебной литературе. Проработка материалов лекции.	Опрос по теории
Тема 2 Многочлены	53	8	45	Изучение теории по учебной литературе. Проработка материалов лекции. Разбор готовых решений по учебной литературе.	Опрос по теории Решение задач на практическом занятии.
Тема 3. Теория делимости в кольце целых чисел	51	6	45	Изучение теории по учебной литературе. Проработка материалов лекции. Разбор готовых решений по учебной литературе.	Опрос по теории

Тема 4. Теория сравнений с арифметическими приложениями	49	4	45	Изучение теории по учебной литературе. Проработка материалов лекции. Разбор готовых решений по учебной литературе.	Опрос по теории Решение задач на практическом занятии.
Контрольная работа	18		18	Решение задач контрольной работы	Проверка контрольной работы
Экзамен	9		9	Подготовка к экзамену	Ответ на экзамене
Итого	216	22	194		

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение

Основная

1. Бухштаб А. А. Теория чисел. [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2015. — 384 с. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/65053>

2. Веселова Л. В. Алгебра и теория чисел. [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Л. В. Веселова, О. Е. Тихонов. — Электрон. дан. — Казань : КНИТУ, 2014. — 107 с. Режим доступа <http://e.lanbook.com/book/73214>

3. Курош А. Г. Курс высшей алгебры [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2013. — 432 с. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/30198>

4. Паршина Т Ю. Алгебра многочленов [Текст] : учеб.-метод. пособие для студентов, обучающихся по профилю "Математика" / Т. Ю. Паршина ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Нижнетагил. гос. соц.-пед. акад. — Нижний Тагил : НТГСПА, 2014. — 88 с.

5. Паршина Т Ю. Теория делимости в кольце целых чисел [Текст] : учебно-методическое пособие для физико-математического факультета / Т. Ю. Паршина ; Федер. агентство по образованию, Нижнетагил. гос. соц.-пед. акад. - Нижний Тагил : НТГСПА, 2010. - 48 с.

Дополнительная

1. Алфутова Н. Б., Устинов А. В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. — М. : Московский центр непрерывного математического образования, 2009. — 336 с. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/9279>

2. Окунев Л. Я. Высшая алгебра [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 336 с. — Режим доступа: . — Загл. с экрана. Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/289>

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы

http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=46.

<http://www.biblioclub.ru/book/63140/>

<http://www.padabum.com/d.php?id=10581>

1. Винберг Э. Б. Курс алгебры. / Э. Б. Винберг. — М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2001. — 544 с.

Ссылка для скачивания <http://nashol.com/2013041770674/kurs-algebri-vinberg-e-b-2001.html>

2. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел. / Л. Я. Куликов. — М.: Высшая школа, — 1979. — 558 с.

Ссылка для чтения: <http://bookre.org/reader?file=1221511&pg=1>

3. Шрейдер Ю. А. Равенство. Сходство. Порядок. / Ю. А. Шрейдер. — М.: Наука, — 1971. — 256 с.

Ссылка для скачивания: <http://www.padabum.com/d.php?id=10581>

Ссылка для чтения: <http://padaread.com/?book=10581&pg=4>

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

1. Лекционная аудитория – 211 А.
2. Доска, мел.
3. Мультимедиа-проектор.

9. Текущий контроль качества усвоения знаний

Проверка усвоения знаний ведется на практических занятиях в устной форме в ходе решения задач у доски.

10. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по данной дисциплине проводится в форме контрольной работы и экзамена. Контрольная работа выполняется дома в межсессионный период.

Примерный вариант контрольной работы

1. Задаёт ли бинарную операцию обычное умножение на множестве чисел вида $a + b\sqrt[3]{2}$, где a, b – целые числа?
2. Докажите, что \mathbb{Q}^+ образует абелеву группу относительно операции \circ , заданной так:
$$a \circ b = \frac{a \cdot b}{5}.$$
3. Найти НОД многочленов f и g , где $f = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$, $g = x^4 + 2x^3 + x + 2$.
4. Записать многочлен $f = 3(x+1)^6 + 2(x+1)^4 - 3(x+1)^2 + 2$ по степеням x . Найти $f'''(-1)$, $f'''(0)$.
5. Найти кратность корня $x = 2$ многочлена $f = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$.
6. Выразить через основные симметрические многочлены $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.
7. Доказать, что многочлен $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$ неприводим над \mathbb{Q} .
8. Освободить дробь $\frac{3}{1 + \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{8}}$ от иррациональности в знаменателе.
9. Найти наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное трёх чисел a, b, c , используя:
а) алгоритм Евклида,
б) каноническое представление данных чисел.
Используя алгоритм Евклида, записать НОД чисел a и b в линейной форме, если $a = 145$, $b = 875$, $c = 410$.
10. Сократить дробь $\frac{1347}{1029}$, раскладывая её в цепную дробь.
11. Решить в *целых неотрицательных* числах уравнение $15x + 13y = 573$.
12. Найти две последние цифры числа 27^{65} .
13. Найти каноническое представление числа $9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 25$. Вычислить число и сумму его натуральных делителей.
14. Найти натуральное число a , если $\tau(a) = 10$, $\sigma(a) = 1023$, $\varphi(a) = 256$.
15. Число a — чётное, не кратное 4. Доказать, что число a^2 при делении на 32 даёт остаток 4.

16. Доказать, что если при целых a, b, c число $6a+12b+11c$ делится на 17, то и $a+2b-c$ делится на 17.
17. Выяснить, является ли число 3053 простым.
18. Найдите все простые числа, заключённые между 600 и 620.
19. Найдите показатель степени числа 47 в каноническом разложении числа 2624!
20. Определите, сколькими нулями оканчивается число 5343!

Вопросы теории к экзамену (7 сессия)

1. Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Теорема о делении с остатком.
2. Деление многочлена на двучлен $(x-c)$. Теорема Безу. Схема Горнера.
3. Отношение делимости в кольце многочленов от одной переменной. Свойства делимости.
4. НОД многочленов. Алгоритм Евклида.
5. Свойства НОД многочленов. Взаимно простые многочлены, их свойства.
6. Неприводимые многочлены в кольце многочленов над полем. Свойства неприводимых многочленов.
7. Основная теорема теории делимости многочленов.
8. Формальная производная многочлена над полем нулевой характеристики. Разложение многочлена по степеням двучлена $(x-c)$. Формула Тейлора.
9. Кратные неприводимые множители многочлена. Алгоритм отделения кратных неприводимых множителей. Корень многочлена. Кратный корень. Определение кратности корня с помощью схемы Горнера.
10. Многочлены от нескольких переменных над полем. Лексикографический способ записи многочленов. Симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах.
11. Алгебраически замкнутое поле. Разложение на линейные множители в кольце многочленов над алгебраически замкнутым полем. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел. Следствия. Формулы Виета.
12. Многочлены в кольце $\mathbb{R}[x]$. Теорема о комплексных корнях многочлена с действительными коэффициентами. Многочлены, неприводимые в $\mathbb{R}[x]$.
13. Многочлены над полем рациональных чисел. Рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами. Критерий Эйзенштейна
14. Бинарные операции, их свойства. Нейтральные и симметричные элементы, их свойства.
15. Группа. Простейшие свойства и примеры групп. Подгруппа, примеры, свойство, признак.
16. Кольцо. Примеры и простейшие свойства. Гомоморфные и изоморфные отображения колец и их свойства.
17. Поле. Примеры. Простейшие свойства. Подполе, примеры, свойства, признак.
18. Теорема о делении с остатком. Отношение делимости в кольце целых чисел.
19. Наибольший общий делитель и его основные свойства.
20. Алгоритм Евклида и его применение к вычислению НОД двух натуральных чисел.
21. Взаимно простые числа, их свойства.
22. Простые числа, их основные свойства. Основная теорема арифметики. Каноническое представление натурального числа.
23. Свойства числовых сравнений
24. Определение класса вычетов, перечислить свойства классов. Сложение и умножение классов. Кольцо классов вычетов, нахождение класса, противоположного данному, вычитание классов.
25. Теоремы о классах вычетов.
26. Полная система вычетов и её формы записи: определение, примеры.

27. Класс, взаимно простой с модулем. Доказать необходимое и достаточное условие взаимной простоты класса и модуля. Число классов, взаимно простых с модулем.
28. Приведённая система вычетов и её формы записи: определение, примеры. Доказать теорему о необходимом и достаточном условии приведённой системы вычетов по модулю m .
29. Теоремы Эйлера и Ферма. Функция Эйлера: определение, свойства. Формулы для нахождения значения функции Эйлера для простого и для составного числа.
30. Сравнение с переменной. Решение сравнения с переменной. Теоремы о равносильности.
31. Сравнения первой степени, методы их решения.
32. Теоремы о решении сравнений высших степеней по простому модулю.

Примерные задачи для экзамена (7 сессия)

1. Найдите НОД многочленов $f = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$, $g = x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 2$, а также многочлены u , v такие, что $(f, g) = f \cdot u + g \cdot v$.
2. С помощью схемы Горнера найти значение многочлена $f = x^4 + 12x^3 + 60x^2 + 136x + 120$ и всех его производных при $x = -4$. Разложите f по степеням $(x + 4)$.
3. Убедитесь, что число $\sqrt{2}$ является корнем многочлена $f = x^5 - 3\sqrt{2}x^4 + 7x^3 - 5\sqrt{2}x^2 + 6x - 2\sqrt{2}$. Определите кратность этого корня и найти все остальные корни f .
4. Определить кратные множители многочлена $f = x^6 - 6x^4 + 4x^3 + 9x^2 - 12x + 4$.
5. Выразите через основные симметрические многочлены многочлен $f(x_1; x_2; x_3) = x_1^3x_2 + x_2^3x_3 + x_3^3x_1 + x_1^3x_3 + x_2^3x_1 + x_3^3x_2$.
6. Числа x_1, x_2, x_3 являются корнями многочлена $x^3 + ax^2 + bx + c$. Корнями какого кубического многочлена будут числа tx_1, tx_2, tx_3 ?
7. Решите с помощью результата систему уравнений
$$\begin{cases} y^2 + x^2 - y - 3x = 0 \\ y^2 - 6xy - x^2 + 11y + 7x - 12 = 0. \end{cases}$$
8. Освободите дробь $\frac{1}{\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2} - 3}$ от иррациональности в знаменателе.
9. Докажите, что многочлен $x^5 - 14x + 21$ неприводим в кольце $\mathbb{Q}[x]$.
10. Найдите рациональные корни многочлена $f = 2x^5 - 9x^4 + 12x^3 - 12x^2 + 10x - 3$.
11. На \mathbb{R}^+ задана операция \circ по правилу $a \circ b = 3 \cdot a \cdot b$. Докажите, что (\mathbb{R}^+, \circ) – группа.
12. Проверьте, ассоциативна ли бинарная операция $*$, заданная на \mathbb{N} по правилу $x * y = x^2 + y^2$. Коммутативна ли $*$ на \mathbb{N} ?
13. Задаёт ли на множестве целых чётных чисел бинарную операцию действие \circ , определённое правилом $a \circ b = \frac{a+b}{2}$? Ответ обоснуйте.
14. С помощью алгоритма Евклида найдите наибольший общий делитель и его линейное представление для натуральных чисел 1232 и 1672.
15. Найдите $(14819, 16147)$ и $[14912, 16147]$.
16. Докажите, что два последовательных нечетных числа взаимно просты.
17. Найдите, при каких простых p числа $p + 10$ и $p + 20$ являются простыми.
18. Докажите, что число 667 не является простым.
19. Запишите каноническое представление числа 32967 и вычислите число и сумму его натуральных делителей.

20. Найдите свободное от квадратов натуральное число, имеющее 4 натуральных делителя, сумма которых 72.
21. Решите в целых числах уравнения:
- $$47x - 16y = 3; \quad x^2 = y^2 + 2y + 13$$
- $$y + 4x + 2xy = 0 \quad 4x^2 - 4xy + 2y^2 = 68$$
22. Докажите $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} (a^5 + b^5 \equiv c^5 \pmod{11} \Rightarrow abc \equiv 0 \pmod{11})$.
23. В поле \mathbb{Z}_{257} найдите класс, обратный классу $\overline{37}$.
24. Составьте полную систему абсолютно наименьших вычетов по модулю 15.
25. Найдите количество натуральных чисел, не превосходящих 350 и взаимно простых с 350.
26. Пользуясь теоремой Эйлера, найдите остаток от деления а) 42^{930} на 25; б) $3^{2^{2012}}$ на 7.

Билет на экзамене содержит один теоретический вопрос и четыре задачи.

За ответ на экзамене ставится оценка:

«отлично», если студент отвечает полностью на все вопросы, и его ответ содержит не более двух недочётов;

«хорошо», если студент отвечает в целом на теоретический вопрос и решает три задачи;

«удовлетворительно», если студент отвечает полностью теорию и решает две задачи;

«неудовлетворительно» – во всех остальных случаях.