

Министерство просвещения Российской Федерации  
Нижнетагильский государственный социально-педагогический институт (филиал)  
федерального государственного автономного образовательного учреждения  
высшего образования  
«Российский государственный профессионально-педагогический университет»

Факультет естествознания, математики и информатики  
Кафедра информационных технологий и физико-математического образования

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ Б1.О.07.08 ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Уровень высшего образования	Бакалавриат
Направление подготовки	44.03.01 Педагогическое образование
Профиль	Математика
Форма обучения	Заочная
Автор:	Зав. кафедрой ИТФМ Мащенко М.В.

Одобрена на заседании кафедры информационных технологий и физико-математического образования. Протокол от 12 января 2024 г. № 6.

Рекомендована к использованию в образовательной деятельности научно-методической комиссией ФЕМИ НТГСПИ(ф)РГППУ. Протокол от 23 января 2024 г. № 5.

Нижний Тагил  
2024

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Цель и задачи освоения дисциплины.....	5
2. Место дисциплины в структуре образовательной программы.....	5
3. Результаты освоения дисциплины.....	5
4. Структура и содержание дисциплины.....	6
4.1. Объем дисциплины и виды контактной и самостоятельной работы.....	6
4.2. Содержание и тематическое планирование дисциплины.....	6
4.3. Содержание тем дисциплины.....	7
5. Образовательные технологии.....	8
6. Учебно-методические материалы.....	8
6.1. Организация самостоятельной работы студентов.....	8
6.2. Организация текущего контроля и промежуточной аттестации.....	10
7. Учебно-методическое и информационное обеспечение.....	12
8. Материально-техническое обеспечение дисциплины.....	13

## 1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

**Цель курса:** изучение теоретических и алгоритмических основ базовых разделов дискретной математики, формирование у студентов навыков описания дискретных объектов в прикладных задачах.

### Задачи курса:

- сформировать навыки описания и оценивания дискретных величин;
- научить составлять и решать простейшие рекуррентные соотношения;
- изучить основные положения теории графов, реализуя их применение при решении практических и профессиональных задач.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина «Дискретная математика» является частью учебного плана по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование), профиль «Математика». Дисциплина Б1.О.07.07 «Дискретная математика» включена в предметно-методический модуль по профилю Математика. Дисциплина реализуется на кафедре информационных технологий и физико-математического образования.

## 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина направлена на формирование и развитие следующих компетенций

Категория (группа) компетенций	Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции
Системное и критическое мышление	УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	ИУК 1.1. Знает основные источники и методы поиска информации, необходимой для решения поставленных задач
		ИУК 1.2. Умеет осуществлять поиск информации для решения поставленных задач, применять методы критического анализа и синтеза информации
		ИУК 1.3. Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки; отличает факты от мнений, интерпретаций и оценок; применяет методы системного подхода для решения поставленных задач
Педагогическая деятельность по проектированию и реализации образовательного процесса в образовательных организациях дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования	ПК-1. Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач.	ПК-1.1. Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета).
		ПК-1.2. Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО.
	ПК-3. Способен формировать развивающую образовательную среду для достижения	ИПК-3.1. Владеет способами интеграции учебных предметов для организации развивающей учебной деятельности (исследовательской, проектной, групповой и др.) ИПК-3.2. Использует образовательный потенциал

	личностных, предметных и метапредметных результатов обучения средствами преподаваемых учебных предметов	социокультурной среды региона в преподавании (предмета по профилю) в учебной и внеурочной деятельности
--	---	--

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

**знать:**

- основные понятия, факты и закономерности, характеризующие свойства абстрактных дискретных объектов;
- основные методы дискретного анализа, в том числе комбинаторные методы, методы теории графов, теории рекуррентных соотношений и производящих функций, теории конечных сумм;

**уметь:**

- реализовывать классические арифметические, теоретико-числовые и комбинаторные алгоритмы при решении практических задач;
- оценивать эффективность и сложность алгоритмов символьных преобразований;
- применять изученные алгоритмические методы в ходе профессиональной деятельности;

**владеть:**

- классическими арифметическими, теоретико-числовыми и комбинаторными алгоритмами;
- навыками практической работы с дискретными объектами, в том числе при осуществлении учебного процесса.

#### 4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

##### 4.1. Объем дисциплины и виды контактной и самостоятельной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зач. ед. (72 часа), их распределение по видам работ представлено в таблице.

##### Распределение трудоемкости дисциплины по видам работ

Вид работы	Форма обучения
	Заочная
	7 семестр
<b>Общая трудоемкость дисциплины по учебному плану</b>	<b>72</b>
<b>Контактная работа, в том числе:</b>	<b>10</b>
Лекции	4
Практические занятия	6
<b>Самостоятельная работа</b>	<b>53</b>
<b>Подготовка к экзамену, сдача экзамена</b>	<b>9</b>

##### 4.2. Содержание и тематическое планирование дисциплины

№ п.п.	Раздел, тема	Распределение часов				Формы контроля
		Всего	Лекции	Практ. зан.	С. р.	
1	<b>Конечные суммы и рекуррентные соотношения</b>					
	Преобразования сумм. Некоторые виды сумм	13	1		12	К. р. № 1,
	Рекуррентные соотношения	12	0	2	10	К.р. № 1,

	и методы их решения					
2	<b>Введение в асимптотические методы</b>	12	1		11	Обсуждение на занятии
3	<b>Элементы теории графов</b>					
	Основные понятия теории графов. Деревья и алгоритмы	13	1	2	10	К. р. № 2,
	Взвешенные графы	13	1	2	10	К. р. № 2,
	Экзамен	9			9	
	<b>Итого</b>	<b>72</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>62</b>	

### 4.3. Содержание тем дисциплины

#### Тема 1. Конечные суммы и рекуррентные соотношения

Понятие рекуррентного соотношения. Примеры задач, приводящих к рекуррентным соотношениям. Числа Фибоначчи. Способы решения рекуррентных соотношений: применение метода производящих функций к решению рекуррентных соотношений.

Суммы и рекуррентности. Способы записи конечных сумм. Преобразования сумм. Кратные суммы. Некоторые методы суммирования. Целочисленные функции.

#### Тема 2. Введение в асимптотические методы

Символы  $\sim$ ,  $o$ ,  $O$ . Основные правила использования этих символов. Асимптотические решения рекуррентных соотношений. Формула суммирования Эйлера, формула Стирлинга (без доказательства).

#### Тема 3. Элементы теории графов.

Основные понятия теории графов. Способы задания графа. Изоморфизм графов. Теорема о сумме степеней вершин графа и следствие из нее. Путь, цепь, цикл, простой цикл. Связные графы. Компоненты связности. Эйлеровы графы. Критерий эйлеровости. Решение задачи о кенигсбергских мостах. Деревья. Критерий "древесности" графа. Двудольные графы. Критерий двудольности. Планарные и плоские графы. Теорема Эйлера о многогранниках. Непланарность графов  $K_5$  и  $K_{3,3}$ . Гипотеза четырех красок.

## 5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В курсе «Дискретная математика» применяются традиционные формы организации аудиторной работы: лекции (в том числе интерактивные), практические занятия, коллоквиумы, в рамках которых предусмотрено использование технологии проблемного обучения, активных форм и методов обучения, представленных в таблице. Удельный вес занятий, проводимых в интерактивной форме, составляет 27,8%.

Название раздела, темы	Вид занятий	Активные формы и методы обучения
Рекуррентные соотношения. Решение неоднородных линейных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами	Практическое занятие	Работа в малых группах: исследование неоднородной части линейных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами, решение контрольных вопросов и контрольных задач.
Введение в асимптотические методы	Практическое занятие	Работа в малых группах
Теория графов. Раскраски	Интерактивная лекция	Круглый стол «Гипотеза четырех красок».

## 6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

### 6.1. Организация самостоятельной работы студентов

Темы занятий	Количество часов			Содержание самостоятельной работы	Формы контроля СРС
	Всего	Аудиторных	Самост. работы		
Тема 1. Конечные суммы и рекуррентные соотношения	25	3	22	Разобрать методы решения линейных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами. Выполнение домашней работы	Решение задач у доски. Проверка домашней работы.
Тема 2. Введение в асимптотические методы	12	1	11	Выполнение домашней работы	Решение задач у доски. Проверка домашней работы.
Тема 3. Элементы теории графов	26	6	20	Выучить основные определения понятий по теме. Самостоятельно изучить тему «Гамильтоновы графы». Разобрать алгоритм Форда-Беллмана нахождения минимального пути в орграфе. Разобрать доказательство теоремы Форда-Фалкерсона и задачи по теме «Сетевое планирование и управление». Разобрать решение задач о взвешенных графах (поиск минимального пути, проблема коммивояжера). Решить предложенные на дом задачи.	Решение задач у доски. Проверка домашней работы.
Подготовка к экзамену	9		9	Подготовка к зачету	
<b>Всего</b>	<b>72</b>	<b>10</b>	<b>62</b>		

#### Перечень вопросов для самоконтроля

1. Дайте определение асимптотического равенства двух функций.
2. Приведите примеры асимптотически равных функций.
3. Охарактеризуйте равенство  $f(x) = O(g(x))$ . Приведите примеры функций, связанных таким равенством.
4. Сформулируйте и докажите теорему о свойствах символа  $O$ .
5. Охарактеризуйте равенство  $f(x) = o(g(x))$ ? Приведите примеры функций, связанных таким равенством.
6. Запишите формулу суммирования Эйлера.
7. Запишите основные правила преобразования конечных сумм.
8. Перечислите основные методы суммирования.
9. Определите понятие рекуррентное соотношение.
10. Опишите алгоритм решения линейного рекуррентного соотношения:
  - а) в случае попарно различных корней характеристического уравнения;
  - б) в случае наличия кратных корней характеристического уравнения.
11. Дайте определение производящей функции.

12. Выведите формулу  $n$ -го члена последовательности Фибоначчи методом производящих функций.
13. Дайте определения понятий: формула алгебры высказываний, равносильные формулы алгебры высказываний, тавтология, противоречие.
14. Дайте определения операций над высказываниями.
15. Перечислите основные равносильности.
16. Перечислите способы задания булевых функций.
17. Дайте определение мультиграфа, псевдографа, полного графа.
18. Сформулируйте и докажите теорему о сумме степеней вершин графа.
19. Перечислите способы задания графов.
20. Дайте определение пути, простого пути, цикла, простого цикла.
21. Дайте определения связанных вершины графа, компонента связности графа, связного графа, Эйлера графа.
22. Сформулируйте и докажите критерий эйлеровости графа.
23. Опишите решение задачи о кенигсбергских мостах.
24. Дайте определение дерева, леса. Приведите пример задачи, связанной с понятием дерева.
25. Сформулируйте и докажите критерий "древесности" графа.
26. Сформулируйте и докажите критерий двудольности графа.
27. Приведите значение выражения "граф укладывается на поверхности  $S$ ".
28. Дайте определение плоского графа, планарного графа.
29. Сформулируйте и докажите теорему Эйлера о многогранниках.
30. Докажите непланарность графов  $K_5$  и  $K_{3,3}$ .
31. Сформулируйте и докажите Теорему Понтрягина-Куратовского.
32. Сформулируйте гипотезу четырех красок.
33. Приведите примеры применения алгоритмов при исследовании взвешенных графов.

## 6.2. Организация текущего контроля и промежуточной аттестации

Текущий контроль усвоения знаний ведется по итогам выполнения практических заданий, сделанных студентами в ходе практических занятий. На занятиях ведется также проверка владения терминами и понятиями в форме устного или письменного опроса. По отдельным темам для проверки текущих знаний проводится компьютерное тестирование. В процессе обучения предусмотрена подготовка сообщений и рефератов по предложенным темам.

Типовые задания	Основные показатели оценки результата
<b>Устный опрос по теме:</b> Основные определения теории графов	Приведены основные определения теории графов: граф, подграф, полный граф, мультиграф, простой граф, двудольный граф и т.д.
<b>Устный опрос по теме:</b> Операции над высказываниями, формулы алгебры высказываний	Приведены определения: высказывание, сложное высказывание, операции над высказываниями (отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция), формула алгебры высказываний. Приведены примеры
<b>Практическое задание:</b> Решение задач по теории графов	Выполнены и оформлены практические задачи на теорему о сумме степеней графа.
<b>Практическое задание:</b> Решение задач по комбинаторике	Выполнены задачи на нахождение количества комбинаций с помощью основных правил и комбинаторных соединений с повторениями и без

### Примерные варианты контрольных работ

#### Контрольная работа №1.

1. Запишите в развернутом виде суммы  $\sum_{0 \leq k \leq 5} a_k$ ,  $\sum_{0 \leq k^2 \leq 5} a_{k^2}$ .

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq k \leq 4} a_{ijk}$$

2. Выразите сумму  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq k \leq 4} a_{ijk}$  в виде тоекратной суммы:

а) суммируя сначала по  $k$ , потом по  $j$ , затем по  $i$ ;

б) суммируя сначала по  $i$ , потом по  $j$ , затем по  $k$ .

Выписать полученные суммы в развернутом виде.

3. Найдите суммы: а)  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot k^2$  б)  $\sum_{k=1}^n k \cdot 2^k$  в)  $\sum_{k=1}^n k^3$  г)  $\sum_{k=1}^n \frac{2 \cdot k + 1}{k \cdot (k + 1)}$ .

4. Найти общее решение рекуррентного соотношения:

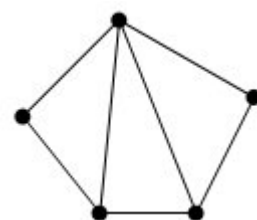
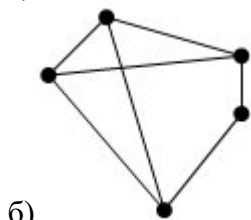
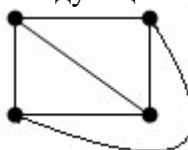
а)  $a_{n+2} - 6 \cdot a_{n+1} + 8 \cdot a_n = 0$ , б)  $a_{n+2} + 4 \cdot a_{n+1} + 4 \cdot a_n = 0$

в)  $a_{n+2} = -a_n$ , г)  $a_{n+2} + 4 \cdot a_n = 2^n \cdot \left( 5 \cdot \cos \frac{\pi \cdot n}{2} - 6 \cdot \cos \frac{\pi \cdot n}{2} \right)$

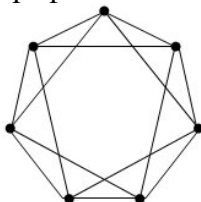
5. Выписать в замкнутой форме производящую и экспоненциальную производящую функции для последовательности  $a_n = 2^n + 3^n$ .

### Контрольная работа №2

1. Можно ли 15 телефонов соединить между собой так, чтобы каждый из них был связан ровно с 11 другими?  
 2. Выяснить, являются ли изоморфными следующие графы:



3. В стране Цифрандии есть 9 городов с названиями 1, 2, ..., 9. Путешественник обнаружил, что 2 города соединены авиалинией в том и только том случае, если двузначное число, составленное из цифр – названий городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?  
 4. Выяснить является ли планарным граф:



### Критерии оценивания практического задания

- оценка «отлично» – работа выполнена полностью и правильно;
- оценка «хорошо» – работа выполнена правильно с учетом 2-3 несущественных ошибок исправленных самостоятельно по требованию преподавателя;
- оценка «удовлетворительно» – работа выполнена правильно не менее, чем на половину или допущена существенная ошибка;



– оценка «неудовлетворительно» – допущены две (и более) существенные ошибки в ходе работы, которые студент не может исправить даже по требованию преподавателя.

### Вопросы к экзамену

#### Тема 1. Конечные суммы и рекуррентные соотношения

1. Формула суммирования Эйлера. Основные правила преобразования конечных сумм.
2. Алгоритм решения линейного рекуррентного соотношения:
  - а) в случае попарно различных корней характеристического уравнения;
  - б) в случае наличия кратных корней характеристического уравнения.

#### Тема 2. Введение в асимптотические методы

3. Асимптотически равные функции. Примеры
4. Равенство  $f(x) = o(g(x))$ . Примеры функций, связанных таким равенством.
5. Производящая функция. Примеры.
6. Формула  $n$ -го члена последовательности Фибоначчи.

#### Тема 3. Элементы теории графов

7. Понятие графа и мультиграфа. Способы их представления. Подграф.
8. Маршруты, связность. Эйлеровы графы. Критерии эйлеровости.
9. Деревья. Теорема о цепях и деревьях.
10. Теорема о сумме степеней вершин графа и следствие из нее.
11. Цикломатическое число, ранг и каркас графа. Характеризация деревьев в терминах цикломатических чисел.
12. Двудольные графы. Критерий двудольности.
13. Планарные графы. Теорема Эйлера о многогранниках.

### Критерии оценивания

Билет экзамена содержит два теоретических вопроса и две задачи.

За ответ на экзамене ставится оценка:

«отлично», если студент отвечает полностью на все вопросы, и его ответ содержит не более двух недочётов;

«хорошо», если студент отвечает в целом на теоретические вопросы и решает задачу «наполовину»;

«удовлетворительно», если студент отвечает полностью на два из трёх вопросов билета;

«неудовлетворительно» – во всех остальных случаях.

## 7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

### Основная литература

1. Гашков, С. Б. Дискретная математика : учебник и практикум для вузов / С. Б. Гашков, А. Б. Фролов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 530 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-17718-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/536528> (дата обращения: 09.08.2024).

2. Палий, И. А. Дискретная математика и математическая логика : учебное пособие для вузов / И. А. Палий. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 370 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-12446-0. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/539583> (дата обращения: 09.08.2024).

### Дополнительная литература

3. Ганичева, А. В. Дискретная математика : учебное пособие для вузов / А. В. Ганичева, А. В. Ганичев. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 160 с. — ISBN 978-5-507-49204-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная

система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/382370> (дата обращения: 24.10.2024). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

4. Микони, С. В. Дискретная математика для бакалавра: множества, отношения, функции, графы [Электронный ресурс]: Учебное пособие / С.В. Микони. – СПб.: Издательство «Лань», 2012. – 192 с.

5. Коньшева, Л. К. Задачник по дискретной математике [Текст] : [учеб.-метод. пособие для вузов] / Л. К. Коньшева, В. В. , Мешков ; М-во образования и науки Рос. Федерации, ГОУ ВПО "Рос. гос. проф.-пед. ун-т", Учреждение Рос. акад. образования "Урал. отд-ние". – Екатеринбург : РГППУ, 2010. - 139 с.

6. Коньшева, Л. К. Дискретная математика [Текст] : учебное пособие / Л. К. Коньшева ; М-во образования и науки Рос. Федерации, ФГАОУ ВПО "Рос. гос. проф.-пед. ун-т", Учреждение Рос. акад. образования "Урал. отд-ние". - Екатеринбург : РГППУ, 2010. - 205 с.

### *Интернет-ресурсы*

1. Лекториум. Дискретная математика [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.lektorium.tv/diskretnaya-matematika> (дата обращения 2019 г.).

2. Дискретная математика: алгоритмы и структуры данных [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title> (дата обращения 2019 г.).

3. Math.ru [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.math.ru/> – (дата обращения 2019 г.).

## **8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

1. Аудитория – 214 А.
2. Доска, мел.
3. Мультимедиапроектор.